UNE VOIE ROYALE VERS LA PENSÉE STOCHASTIQUE : LES PROMENADES ALÉATOIRES COMME « POUSSE D'APPRENTISSAGE »

Jorge SOTO-ANDRADE[1][2]

Title

A royal road to stochastic thinking: random walks as learning sprouts

RÉSUMÉ

Nous présentons un exemple de voie d'apprentissage, que nous nommons « pousse d'apprentissage », suggérée par notre approche métaphorique énactive de la didactique des mathématiques, visant au développement de la pensée stochastique et basée sur les marches aléatoires, un avatar de choix du hasard. Cette voie a été explorée au niveau primaire et supérieur depuis quelques années. Nous commentons les résultats et les phénomènes observés.

Mots-clés : *métaphorisation, énaction, marches aléatoires, pousses d'apprentissage, collaboration.*

ABSTRACT

We report on an example of a "learning sprout", suggested by our enactive metaphoric approach to mathematics education, aiming at the development of stochastic thinking and grounded in random walks, a foremost avatar of randomness. This sprout has been tested over the past few years at the primary and higher education levels. We comment on results and phenomena observed.

Keywords: *metaphoring, enaction, random walks, learning sprouts, collaboration.*

1. Introduction

Le but de cet article est de montrer comment une approche théorique en didactique des mathématiques, assez peu répandue en France, à savoir celle de la métaphorisation énactive (Soto-Andrade, 2014 ; Diaz-Rojas et Soto-Andrade, 2015) peut suggérer comment rendre accessibles des notions stochastiques clés à des étudiants ou des usagers pas particulièrement portés sur les mathématiques ou la statistique. La métaphorisation et l'énaction sont présentées succinctement ici en section 2 ; par leur appui sur des réalités sensibles et tangibles, ainsi que par leur recours à des activités corporelles, elles sont particulièrement appropriées pour ménager un accès attractif à l'aléatoire pour la grande majorité des élèves du primaire et du secondaire, pour les étudiants du premier cycle universitaire, en filières de sciences humaines et de sciences sociales, ainsi que pour les futurs instituteurs.

[1] CIAE et Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université du Chili, Casilla 653, Santiago, Chili, sotoandrade@u.uchile.cl
[2] Subventionné par PIA-CONICYT Fonds Basal pour Centres d'Excellence, Projet BF0003 et par le Fonds Domeyko, Université du Chili (Projet : Réseaux Interactifs d'Apprentissage).

La pensée stochastique porte sur le hasard. Or, parmi les avatars du hasard, une place de choix revient aux promenades aléatoires (le plus souvent appelées « marches aléatoires » en mathématiques). Elles fraient, à notre avis, une vraie voie royale, fort amicale, pour accéder à la pensée stochastique, car elles traversent les frontières : on les trouve aussi bien dans le « monde naturel » que dans le « monde culturel ». Elles constituent en fait une *métaphore énactive* du hasard, fort visuelle, qui peut être jouée, exécutée, représentée corporellement et simulée, de l'école élémentaire à l'université. Elles permettent même de *construire* le concept de probabilité (voir section 4 ci-dessous)

On peut approcher leur étude de manière statistique, métaphorique, probabiliste… Elles fournissent des « modèles universels » pour beaucoup de phénomènes.

Dans la suite, après avoir rappelé brièvement les traits essentiels de la métaphorisation et de l'énaction, nous introduisons les notions d'avatar d'une idée mathématique fondamentale et de « pousse d'apprentissage ». Nous commentons aussi l'histoire des marches aléatoires dans la culture humaine, songeant notamment à motiver les étudiants en sciences humaines.

Tenant compte du fait que maîtres et professeurs se plaignent souvent, à juste titre, des théories fort élaborées en didactique des mathématiques, dont on n'aperçoit guère les retombées en salle de cours ou en amphithéâtre, nous nous attelons ensuite à la tâche de présenter un éventail d'exemples d'activités didactiques commentées et un exemple de pousse d'apprentissage essayée ces dernières années, suggérés par notre approche théorique, dont on ébauchera quelques ingénieries didactiques. Ces activités portent sur les marches aléatoires, le temps d'attente d'un succès bernoullien (temps d'absorption d'une marche aléatoire à barrières absorbantes), l'espérance et l'écart-type.

2. Cadre théorique

2.1. Métaphorisation

Les métaphores sont bien connues en tant que recours rhétoriques (Pouilloux, 2004), mais elles sont aussi des outils cognitifs puissants. Basées sur notre système perceptif-moteur, elles nous permettent de comprendre ou même de construire des concepts mathématiques nouveaux (English, 1997 ; Lakoff & Núñez, 2000 ; Manin, 2007 ; Sfard, 2009 ; Knops *et al.*, 2009 ; Soto-Andrade, 2006, 2014) et de résoudre des problèmes de manière amiable et efficace (Libedinsky & Soto-Andrade, 2015). En fait, nous *connaissons* à travers des métaphores (Johnson & Lakoff, 2003 ; Lakoff & Núñez, 2000 ; Soto-Andrade, 2006). De plus, les métaphores sont un outil de choix pour promouvoir la démocratisation de l'enseignement des mathématiques (Cantoral, 2015).

A présent, on admet qu'il n'y a pas que les métaphores verbales : il en existe aussi des gestuelles, des visuelles, sans discours. Nous nous intéressons ici particulièrement aux métaphores *énactives* (voir 2.2).

Des exemples bien connus de métaphores sont : « additionner, c'est mettre ensemble » ; « soustraire, c'est enlever » ; mais cela ne convient plus pour soustraire 5 de 2. Une autre métaphore nous sauve alors : « soustraire, c'est reculer ». A noter qu'ici on métaphorise au préalable les nombres comme des places ou des points sur la droite numérique. Une métaphore dont on ne tire pas assez parti pour les nombres négatifs est : « un nombre négatif, comme -3, est une quantité ou grandeur positive, 3 dans ce cas, qui « coule dans l'autre sens » ».

Aussi, une équation est une balance en équilibre, avec des poids connus dans ses plateaux, en plus d'une « boîte noire » dans l'un des plateaux, dont on ne connaît pas *a priori* le poids. Cette métaphore nous transfère au domaine de la statique, où l'on résout alors des équations de premier degré à une inconnue, en jouant avec une balance (on enlève le même poids des deux cotés, simplement).

2.2. Enaction

L'énaction peut être métaphoriquement décrite par le poème célèbre d'Antonio Machado (Thompson, 2007 ; Malkemus, 2012) :

> « *Caminante, son tus huellas el camino, y nada más; caminante, no hay camino, se hace camino al andar* » [« Marcheur, ce sont tes empreintes, le chemin, rien d'autre ; il n'y a pas de chemin, on trace un chemin en marchant »].

En effet Varela lui-même a métaphorisé l'énaction, en tant que processus émergeant et situé, comme le traçage d'un chemin en marchant (Varela, 1987, p. 63), quand il a introduit l'approche énactive en sciences cognitives (Varela *et al.*, 1999). Le paradigme énactif voit ainsi la cognition ancrée dans la dynamique sensorimotrice des interactions entre un organisme vivant et son milieu (Maturana et Varela, 1984 ; Varela *et al.*, 1999).

L'énaction en didactique des mathématiques se trouve déjà chez Bruner (1953) qui l'a introduite comme « apprendre en faisant ». En fait, il a décrit les trois modes fondamentaux de représentation du monde : énactif, iconique et symbolique (EIS). Plus tard ses idées ont été appliquées et diffusées avec beaucoup de succès par la méthodologie CPA (Concrete-Pictorial-Abstract) de Singapour. Des développements théoriques et pratiques récents de l'approche énactive dans le domaine de l`éducation voient le maître comme un pratiquant énactif agissant en situation et nous invitent à viser les manières d'être qui peuvent être facilitées en salle de cours, et non seulement les connaissances mathématiques spécifiques générées (cf. Masciotra *et al.*, 2007 ; Proulx & Simmt, 2013 ; Abramson *et al.*, 2015). Ils nous incitent aussi à penser le curriculum comme un processus coulant, énactif et imprévisible, qui émerge de la relation de dialogue située entre élèves et maître (Dall'Acqua, 2010).

2.3. Avatars des Idées Fondamentales et Pousses d'apprentissage

Rappelons que « avatar » signifie étymologiquement « descente ». Nous parlerons donc métaphoriquement des avatars d'une notion mathématique, étant entendu que la notion n'est pas préexistante à ses avatars, mais qu'ils se co-déterminent, dans une relation circulaire (Maturana et Varela, 1994). Le défi à relever est donc d'identifier des avatars pour les idées mathématiques fondamentales qui nous concernent. Nous proposons, par exemple, les marches aléatoires pour la notion de hasard, les polygones, polyèdres et polytopes pour la notion de forme, les fractales pour la notion d'infini, et aussi de forme…

Ce que nous dénommons « pousse d'apprentissage » est l'épanouissement d'une idée ou notion mathématique fondamentale, au moyen d'un ou plusieurs avatars, à travers plusieurs niveaux (primaire, secondaire, supérieur). Par exemple, les marches aléatoires, avatar du hasard, donnent naissance à plusieurs pousses d'apprentissage, dont nous décrivons l'une d'entre elles dans la suite.

Cette notion est proche des parcours d'apprentissage au sens de Wittmann (2012), qui sont néanmoins en général plus prescriptifs et moins énactifs que nos pousses.

Un exemple de pousse d'apprentissage, que nous développons ci-dessous, est fourni par la promenade aléatoire de la grenouille : elle se promène sur une rangée de pierres dans une mare, en sautant chaque fois d'une pierre à sa voisine de droite ou de gauche, comme si elle se décidait en lançant une pièce : pile, je saute à droite ; face, je saute à gauche.

Une promenade d'un ou deux sauts peut être abordée par les élèves déjà en CE1 ou CE2. Nous avons fait des expériences pilotes avec des enfants de 8, 10, 12 ans et des instituteurs collaborant avec nous ont testé cette pousse d'apprentissage en 5e degré (CM2) dans 4 classes appartenant à 3 écoles de différents niveaux socio-économiques (voir section 5.2 ci-dessous).

Ensuite, en passant par le secondaire, cette pousse peut s`épanouir jusqu'au niveau du supérieur (troisième cycle universitaire) sous la forme du problème de la ruine, où l'on a maintenant des barrières absorbantes à droite et à gauche (des pierres où la grenouille stagne ou des crocodiles en train de la guetter…). Un mérite didactique de ce problème est d'être résoluble par maintes méthodes : analytiques, géométriques, récursives, systémiques, métaphoriques, que nous commenterons ailleurs.

3. Les marches aléatoires dans la culture humaine

3.1. Marches aléatoires dans le Yi Jing

Il est probable que l'avatar le plus ancien des marches aléatoires dans la culture humaine se trouve dans le Yi Jing, oracle chinois vieux de plusieurs millénaires. En effet, pour consulter le Yi Jing suivant la tradition, on construit patiemment, par une méthode aléatoire basée sur l'arithmétique modulo 4, l'une après l'autre, les six lignes – chacune entière (Yang) ou brisée (Yin) – qui forment un hexagramme (Wilhem, 1994 ; Marshall, 2015). Les 64 hexagrammes possibles se trouvent rangés dans un tableau 8 fois 8 suivant l'ordre naturel des nombres, si l'on interprète les hexagrammes comme l'écriture binaire des nombres de 0 à 63 (Figure 1).

Ce tableau est dû au mathématicien chinois Shao Yong (1011-1077), qui a aussi avancé une vision synthétique du Yi Jing (Figure 2), le Xiantian (Avant le Ciel) (Marshall, 2015). On voit ici clairement un arbre binaire à 6 générations (pour la première fois dans l'histoire de l'humanité, vraisemblablement), où les hexagrammes apparaissent comme cheminements verticaux. À noter que Shao Yong a traduit habilement chaque ligne Yang par un champ blanc et chaque ligne Yin par un champ noir

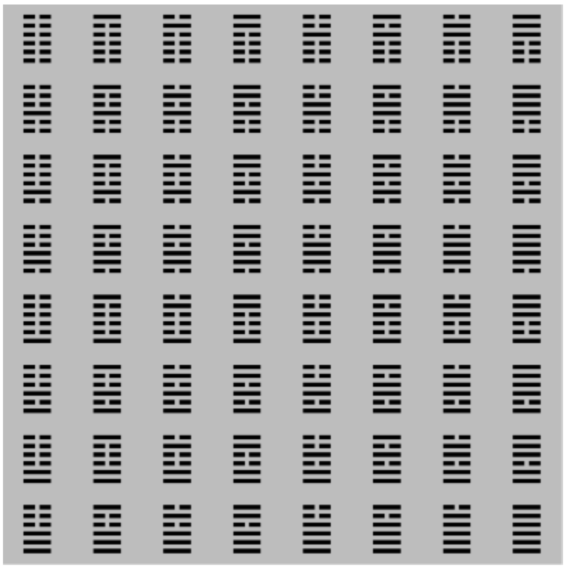

FIGURE 1 – *Tableau de Shao Yong*

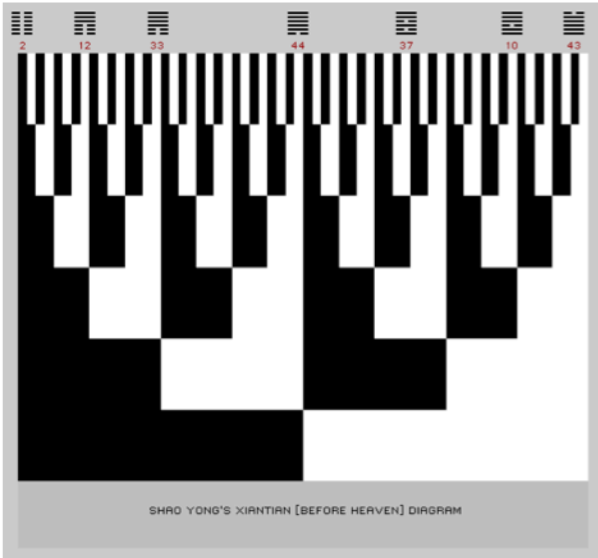

FIGURE 2 – *Xiantian de Shao Yong*

3.2. Le mouvement brownien

Bien plus tard en Occident, en 1827, Brown observa le premier le « mouvement brownien » des microparticules issues de graines de pollen en solution aqueuse (Powles, 1978). On peut remarquer néanmoins que cela avait été anticipé par Lucretius (60 AD) qui avait observé les particules de poussière qui dansaient aléatoirement sous la lumière du soleil et avait attribué cela à des « mouvements latents et sous-jacents de la matière » (loc. cit). Parmi les exemples contemporains, on peut citer le mouvement brownien en alliages métalliques (Preuss, 2002), prédit en 1905 par Einstein (1956), outre les fluctuations des bourses dans le monde !

3.3. Le vol aléatoire d'un moustique

La même année 1905, Pearson, motivé par l'étude de la propagation de la malaria, a songé à modéliser le vol aléatoire d'un moustique par une marche aléatoire composée de trajets rectilignes d'une même longueur L, avec des changements de direction en un angle arbitraire chaque fois. Dans une note à Nature (Pearson, 1905) il a alors posé la question de calculer la probabilité qu'un homme qui marche de la sorte se trouve à une distance comprise entre r et $r + dr$ au bout de n pas. Une semaine plus tard Lord Rayleigh a répondu en remarquant qu'il avait déjà résolu ce problème dans le contexte de la composition de n vibrations de même période, amplitude unitaire et phase aléatoire, et que la densité de probabilité cherchée était :

$$\frac{2}{n} e^{r^2/n}\, r dr.$$

Pearson, en plus de remercier Lord Rayleigh, a conclu que de manière inattendue l'endroit où il serait le plus probable de trouver un ivrogne qui se promènerait en plein air en étant encore capable de se tenir debout, serait tout près de son point de départ !

3.4. Marches aléatoires humaines

Si nous voulons un thème plus motivant pour les étudiants en sciences humaines, souvenons-nous des moines franciscains qui pélerinaient sur le réseau routier de l'Italie médiévale pour prêcher l'Évangile, en essayant de devenir des instruments de la volonté de Dieu. Ils voulaient donc éviter tout choix rationnel de direction aux carrefours. Vu du dehors, leur but était de marcher aléatoirement sur le réseau routier. Or, Saint François a inventé une méthode habile pour mener à bien ce choix aléatoire : il invitait un jeune moine à tourner sur lui même, à outrance, jusqu'à ce que la nausée s'empare de lui. Le moine n'étant pas un derviche tourneur, il finissait par s'évanouir et tomber par terre. Tout le groupe prenait alors la route la plus proche de la direction où pointait la tête du moine (Anonymous, ca. 1600). Outre les prêcheurs, aussi des prédateurs de différentes espèces, en particulier des chasseurs-cueilleurs humains (Raichlen *et al.*, 2014), décrivent des marches aléatoires.

4. Exemples : Métaphores énactives pour des notions probabilistes

Dans la suite, nous décrivons génériquement des métaphores variées, principalement énactives, pour des notions probabilistes et statistiques faisant partie des programmes d'études de l'enseignement primaire, secondaire et supérieur.

Notre approche est d'essayer de favoriser l'émergence de ces métaphores chez des élèves confrontés à des situations problématiques, parfois même des germes de situations a-didactiques. Notre hypothèse est qu'une « tension didactique » suffisamment élevée favoriserait le jaillissement de métaphores personnelles chez les élèves, susceptibles de débloquer la situation (Soto-Andrade, 2013b).

Les profils des élèves concernés par cette métaphorisation sont répertoriés à la section 5.1 ci-dessous. Ils s´étalent de l´école élémentaire à l'enseignement supérieur, en passant par des mineurs délinquants en cours de réinsertion sociale. Nous décrivons ces métaphorisations en contexte de cours, car nous visons surtout à faciliter et étudier les conditions de leur émergence personnalisée chez les élèves.

4.1. Les marches aléatoires sont des morcellements

Rappelons qu'un exemple paradigmatique de marche aléatoire est le mouvement brownien des particules issues de grains de pollen en solution aqueuse, découvert en 1827 par le botaniste anglais Robert Brown.

Nous proposons typiquement aux élèves de collège et de lycée la question : que pourrait-on faire pour étudier de manière élémentaire un phénomène si complexe que le mouvement brownien ? Certains, surtout parmi des élèves de lycée ou d'université, suggèrent aussitôt de simplifier le mouvement, mais sans jeter le bébé avec l'eau du bain… On tombe alors d'accord pour restreindre les directions possibles de mouvement de la particule aux quatre points cardinaux, par exemple, pour un mouvement en 2 dimensions ; ou même à deux directions, droite et gauche, pour un mouvement encore plus simple, en 1 dimension. Plusieurs « frères bébé » du mouvement brownien, appelés « Baby Brown » par les élèves, émergent alors, que nous décrivons maintenant « en contexte ».

La promenade aléatoire de Brownie – C'est la promenade aléatoire d'un chiot, appelé Brownie par les élèves, qui s'échappe de chez lui quand il sent que sa maîtresse se prépare à lui faire un shampoing. Se trouvant dans une ville au plan de rues en damier, il va de carrefour en carrefour en repartant à chacun d'entre eux aléatoirement dans chacune des directions Nord, Sud, Est ou Ouest, affolé car il risque de se faire écraser en traversant. Comme il est encore tout jeune, il se couche à un coin de rue, épuisé, après avoir couru le long de quatre pâtés de maison de la sorte.

Question : *où va-t-on le trouver ?* Comment répondre à cette question impossible ? En plus, comme le chiot s'échappe régulièrement tous les samedis, pour la raison déjà évoquée, sa maîtresse, lasse d'aller le chercher chaque fois, songe à offrir une récompense à celui qui le lui ramènera. Quand on demande quel devrait être le montant de la récompense, les élèves de lycée ou de l'enseignement supérieur répondent aussitôt que la récompense devrait être proportionnelle à la distance parcourue par celui qui lui ramène le chiot. La question se pose alors pour la maîtresse *d'estimer le budget annuel nécessaire pour payer ces récompenses* !

Cette promenade de Brownie a été étudiée en détail par Soto-Andrade (2013a), en tant que situation didactique. Elle a été testée sur des apprenants des classes a) à g) décrites à la section 5.1.

La promenade aléatoire de la grenouille – Un frère bébé encore plus petit du mouvement brownien est fourni par la promenade aléatoire, sur une rangée de pierres dans un étang, d'une grenouille qui choisit indifféremment sa pierre à droite ou à gauche lors de chaque saut. Notons que la rangée linéaire de pierres pourrait se fermer sur elle même, de sorte que la grenouille pourrait en fait se promener sur les sommets d'un polygone, disons régulier.

Nous décrivons dans la section 5.2 ci-dessous une application de cette situation en salle de cours dans trois écoles différentes.

Les différents niveaux de réponse aux questions impossibles – En travaillant avec les élèves la « question impossible » : *Où se trouve Brownie, ou la grenouille, après un certain nombre d'étapes ?*, on constate que se dégagent les niveaux suivants de réponse :

Niveau 0 – Dieu seul le sait ! On ne peut pas savoir ! C'est la première réponse à émerger.

Niveau 1 – Il y a des endroits possibles et d'autres impossibles. Parmi les endroits impossibles, il n'y a pas que ceux qui sont trop éloignés du point de départ !

Niveau 2 – On peut établir un classement des endroits possibles où le promeneur peut se trouver.

Niveau 3 – On peut quantifier ! En voyant des morceaux du promeneur à chaque endroit possible, que l'on peut soit calculer métaphoriquement (cf. ci-dessous), soit inférer à partir des fréquences relatives expérimentales. A ce moment, on *construit métaphoriquement la notion de probabilité.*

Plusieurs métaphores émergent au moment d'aborder « à la main » le calcul des probabilités de présence (morceaux) de la grenouille dans les différents sommets, pour un nombre d'étapes petit.

Nous avons autant que possible fait travailler en groupes les apprenants décrits en 5.1, en les *autorisant* à métaphoriser et même en les y stimulant. Nous cherchons donc à leur faire construire leurs propres métaphores, plutôt que leur imposer les nôtres. Éventuellement, avec un peu d'aide au besoin, il n'est pas rare qu'au sein des groupes émergent certaines des métaphores suivantes.

La métaphore « salomonique » – Dans cette métaphore, on voit la grenouille se casser en deux demi-grenouilles, qui vont débarquer aux deux pierres voisines, au moment du premier saut, et ainsi de suite… On se retrouvera donc pas à pas avec de petits bouts de grenouille un peu partout, que l'on pourra mettre ensemble pierre par pierre sans difficulté.

Cette métaphore, qui ramène le calcul de probabilités à un calcul déterministe de fractions, est souvent la plus accessible aux étudiants. Elle leur permet de calculer de manière commode et sûre les probabilités en question, pourvu qu'ils maîtrisent suffisamment le calcul de fractions, ce qui n'est d'ailleurs pas toujours le cas…

Il est à remarquer que la métaphore salomonique nous permet de relier la marche aléatoire de la grenouille à l'évolution d'un marché de consommateurs en économie, par exemple : la probabilité de trouver la grenouille à un sommet donné devient alors la part du marché détenue par un producteur donné. Ce genre de liaison inattendue motive fort les étudiants, en général.

La marche aléatoire de la grenouille peut ainsi apparaître comme une métaphore, utile, de l'évolution d'un marché économique. Mais, d'autre part, la dite évolution, ou encore, un processus de fission d'une particule, peut apparaître, à son tour, comme une métaphore de la marche aléatoire de notre grenouille.

La métaphore hydraulique – C'est une variante de la métaphore salomonique, où nous voyons maintenant s'écouler un fluide, par gravité, par un graphe de tuyaux, en se partageant à chaque point de bifurcation selon la loi de promenade de la grenouille.

On pourrait proposer à des élèves du primaire ou du secondaire, comme défi, de mettre au point, artisanalement, un réseau de tuyaux, qui donnerait une résolution analogique de la promenade aléatoire de la grenouille par une rangée de pierres ou par les sommets du triangle équilatère.

Une activité plus simple, qui a été réalisée par des enseignants du secondaire avec leurs élèves, dans des écoles de milieux socio-économiques défavorisés de Santiago du Chili, consiste à décrire la marche aléatoire symétrique d'une grenouille par les entiers (visualisés sur la droite numérique). La grenouille part, disons, de l'entier 0, et saute à n'importe lequel de deux voisins immédiats, 1 et –1, dans ce cas, avec égale probabilité, et ainsi de suite.

Les étudiants pourront alors assigner, de proche en proche, les probabilités de présence de la grenouille à chaque entier, en laissant s'écouler équitablement notre fluide probabiliste, par gravité, à partir de l'apex de la grille triangulaire de tuyaux de la Figure 3.

Bien sûr, ils retrouveront ainsi, à l'aide d'une métaphore hydraulique, le célèbre triangle de Pascal et la loi de probabilité du nombre de « pile » obtenu en lançant n fois une pièce. Mais, on aurait pu, aussi bien, les retrouver avec notre métaphore pédestre, par exemple…

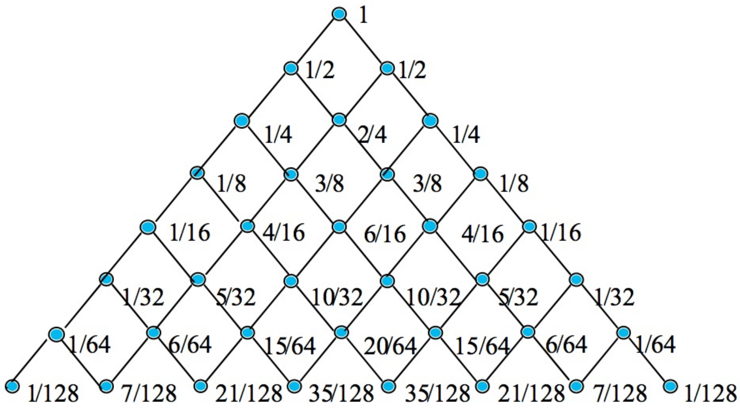

FIGURE 3 – *Diagramme pour la métaphore hydraulique*

La métaphore pédestre – Nous essayons de motiver les élèves qui n'aiment pas du tout le calcul des fractions à chercher d'autres métaphores qui l'évitent autant que possible, au moins jusqu'au dernier pas. Il arrive souvent que quelqu'un songe à lâcher, à l'apex (ou racine), un nombre convenable de grenouilles qui se partageront en moitiés égales, et qui feront de même à partir de chaque sommet où elles arrivent. Pour $m = 10$, disons, les étudiants s'aperçoivent vite que 1024 grenouilles est un nombre adéquat, car elles auront à se partager 10 fois de suite. Il leur suffira de faire le compte des grenouilles débarquées à chaque sommet, juste après le 10e partage, et de calculer le pourcentage respectif, pour trouver les probabilités cherchées. Nous laissons aux étudiants la possibilité de découvrir par eux-mêmes, au moment d'aborder d'autres situations problématiques, la portée fort générale de ce type de métaphore. Mais remarquons déjà que les fameux problèmes des faux positifs en contextes bio–médicaux se résolvent en jouant, à l'aide des métaphores pédestres. Cette approche est tout à fait équivalente à la stratégie des fréquences naturelles de Gigerenzer (2011).

4.2. Les fréquences relatives et les probabilités sont des poids

Ayant entrepris l`étude statistique d'une variable aléatoire simple (par exemple, le temps d'attente de « pile » au lancer d'une pièce de monnaie), les étudiants auront dressé ce que nous appelons une « photo » de la variable, c'est-à-dire le graphe de ses fréquences relatives, obtenu à partir d'un certain nombre de répétitions de l'expérience qui la définit. Les étudiants (appartenant aux classes a) à g) décrites à la section 5.1) font ces répétitions à la main, s'il s'agit d'une centaine de lancers environ, et de manière optionnelle à l'aide d'une feuille de calcul (en se servant de la fonction ALÉATOIRE) pour quelques milliers de lancers ou plus. A partir de là, ou bien par un raisonnement théorique, éventuellement métaphorique (nous y reviendrons plus loin), ils auront dressé ce que nous appelons le « portrait » de la variable aléatoire, c'est-à-dire le graphe de sa loi de probabilité. Traditionnellement, on leur apprend alors à calculer la moyenne, ou l'espérance, suivant le cas.

Suivant notre approche théorique, s'ils ne l'ont pas vu spontanément, on leur demandera si ces graphes, avec leurs moyennes ou espérances, ne ressemblent pas à quelque chose de connu et quotidien… Certains y « voient » alors une distribution des masses (ou poids) et leur point d'équilibre. La plupart, néanmoins, ayant subi un enseignement plutôt répressif, ont besoin de se sentir autorisés et stimulés pour voir quelque chose d'autre dans leur graphe, ce qui implique une modification du contrat didactique (Brousseau, 1986). Pour eux, les mathématiques, ce n'est pas encore l'art de « voir l'invisible… »

Moyenne et espérance – Une fois que le déclic s'est produit, ils découvrent avec un certain émerveillement qu'ils sont transférés à un autre domaine, celui de la mécanique, plus spécifiquement celui de la statique, où l'on peut jouer à trouver le point d´équilibre d'un système de masses disposées sur une réglette. Dorénavant, ils peuvent se servir, avec profit, de leur intuition statique, bâtie sur les expériences d'enfance sur une balançoire, pour estimer, et ensuite calculer, une moyenne ou une espérance. Notons que, pour un calcul précis, ils peuvent s'appuyer sur leur expérience enfantine du jeu de bascule : où devraient s'asseoir sur la pièce de bois un garçon et une fillette, pour atteindre l'équilibre, si le garçon pèse le double de la fillette ?

En somme, la moyenne ou l'espérance de la variable aléatoire X devient le point d 'équilibre, ou si l'on préfère, le barycentre (ou centre de masses), de la distribution des masses qui est la métaphore statique d'une photo ou du portrait de X, suivant le cas.

Ecart-type – Ensuite, placés devant le problème de mesurer, de manière simple, la dispersion des valeurs de *X*, les élèves peuvent se ramener à un problème de dynamique, grâce à notre métaphore. Nous demandons aux étudiants comment ils pourraient ressentir, kinesthésiquement[3], l'éparpillement des masses en question, s'ils avaient la réglette en main, dans une chambre obscure, sans tripoter les masses une par une.

En travaillant en groupes de 4 ou 5, ils s'aperçoivent vite que la statique ne donne rien et qu'il faudrait faire bouger la réglette à poids. Dans chaque groupe, il y en a au moins un qui a l'idée de faire tourner la réglette sur elle-même, autour du pivot défini par le point d'équilibre. Le problème est alors transféré au domaine de la dynamique des corps tournants, qui est aussi un terrain de jeux d'enfance. Souvent leurs avis sont partagés sur ce qui arrive quand quelqu'un qui tourne sur lui-même, bras écartés, avec deux briques aux mains, replie ses bras. Un peu d'expérimentation, même sans tabouret giratoire, leur permet cependant de conclure que replier ses bras fait tourner plus vite !

Ainsi les étudiants peuvent arriver à avoir l'idée d'utiliser le système des poids le plus simple qui soit, de poids total 1, qui est capable de tourner sur son centre de masse, pour mesurer le degré d´éparpillement des poids dans notre réglette. Il s'agit, bien sûr, d'un haltère (avec une boule d'un demi kilo à chaque bout), équilibré sur son centre. Il leur semble d'habitude clair qu'en jouant sur la longueur du *bras* (distance de chaque boule au centre de masse) de l'haltère, on peut « imiter » parfaitement l'inertie rotationnelle (moment angulaire) de chacune de nos distributions de poids. Bien sur, l'imitation sera réussie quand l'on devra faire le même effort musculaire pour imprimer la même vitesse angulaire à la distribution originale et à notre haltère. Or, le bras qui fait réussir l'imitation est justement *l'écart-type*. Il pourra être estimé avant de le calculer, grâce à l'intuition giratoire où la métaphore nous permet de puiser…

La formule explicite habituelle pour l'écart-type s'obtient en égalisant les moments angulaires de la distribution de poids et de l'haltère type, une fois que l'on s'est aperçu – par une expérimentation soigneuse – que le moment angulaire d'un objet giratoire est proportionnel au produit de sa masse par le *carré* de son bras. Ainsi, l'écart-type de *X* devient le bras de l'haltère qui imite parfaitement le moment angulaire de notre distribution des poids.

Ce cheminement cognitif, basé sur la métaphore « les probabilités sont des poids » a été mis en œuvre, avec succès, avec les apprenants a) - g) décrits à la section 5.1. La plupart des

[3] A l'aide de la sensation de mouvement des parties du corps.

élèves des cours de probabilités et statistique évoquent en fin de semestre la découverte de l`écart-type, à partir de la rotation, comme l'un des points forts et inattendus du cours.

5. Expérimentation didactique

5.1. Contexte scolaire (les apprenants)

a) Des instituteurs enseignant dans des écoles publiques et privées (jusqu'en huitième année, équivalent de la 4^{e} française au collège) engagés dans un programme de formation continue de 15 mois et 700 heures, visant à renforcer leur formation en mathématiques et en didactique des mathématiques (2007-2015, 15 à 30 enseignants par année).

b) Des étudiants d'un cours semestriel de Mathématiques générales fait depuis 2001 à une cinquantaine d'étudiants de la filière Sciences Sociales et Humanités du programme de « Baccalauréat » de l'Université du Chili (proche de l'ancien DEUG, de l'ancienne licence pluridisciplinaire, ou d'un « bachelor » anglo-saxon). Ces étudiants, 30 à 50 par an, visent les sciences humaines et sociales, mais aussi la Faculté de Droit, par exemple.

c) Des enseignants de mathématiques et physique du secondaire chilien (équivalent à la fin du collège et au lycée en France) en formation initiale à l'Université du Chili, suivant un cours semestriel de probabilités et statistique (50 étudiants en moyenne) en 2009 -2015.

d) Des étudiants de Licence-ès-Sciences, filière mathématiques, et des enseignants du secondaire en physique et mathématiques en formation initiale, suivant un cours optionnel semestriel sur les mathématiques « post-modernes »[4], à l'Université du Chili, en 2012 (25 étudiants en tout).

e) Des étudiants d'un cours semestriel de probabilités et statistique, de la Licence-ès-Sciences de Université du Chili, filière mathématiques et physique, 30 étudiants en moyenne, en 2009-2011.

f) 25 étudiants de 2^{e} cycle (Licence ès Sciences, filière mathématique et aussi biologie) et de 3^{e} cycle (Magister et Doctorat) dans un cours commun sur les marches aléatoires, en 2015 (Université du Chili).

g) Des enseignants de mathématiques du premier et second degré participant à des cours-ateliers de formation continue au nord, centre et sud du Chili (2006-2008, 2011-2015, 30 enseignants par cours-atelier).

h) Des mineurs délinquants engagés dans un programme de réinsertion sociale (Office National des Mineurs - Université du Chili, 2012-2015, 7-8 mineurs par an).

i) Une cinquantaine de participants de profils variés (instituteurs, maîtres, professeurs, didacticiens, formateurs de maîtres, mathématiciens) aux journées 2014 de la Société Chilienne d'Éducation Mathématique.

[4] Post-bourbachiques, post-structuralistes, multigenres et multiculturelles (Manin, 2007 ; Cantoral, 2013).

5.2. La promenade aléatoire de la grenouille à l'école primaire (5e année, équivalente au CM2)

Cette pousse d'apprentissage a été mise en œuvre par des enseignants engagés dans le programme de formation continue *a* ci-dessus (Andrade *et al.*, 2013 ; López, 2014), en 5e année de l'école primaire chilienne (équivalente au CM2 français) avec des élèves de 10 à 12 ans, appartenant à trois écoles, appelées A, B et C dans la suite, représentatives des trois régimes de fonctionnement du système scolaire : public, mixte (privé mais subventionné par l'état), privé à part entière. Leur profil est le suivant :

- A : privée, de niveau socio-économique haut, parents ayant 4 ans d´études supérieures au moins, revenu familial d'au moins 1500 euros (6 SMIG), 5% des élèves classés « vulnérables », score SIMCE : 300.
- B : mixte, de niveau socio-économique moyen ou bas, parents ayant complété la scolarité secondaire seulement, revenu familial d'environ 3 SMIG, 75% d'élèves vulnérables, score SIMCE : 240.
- C : publique, niveau socio-économique bas, parents ayant complété à peine la scolarité obligatoire (8 ans), revenu familial d'au plus 2 SMIG, 80% d'élèves vulnérables, score SIMCE au-dessous de 240.

NB : SIMCE est un test national standardisé, appliqué à l'école primaire et secondaire, proche du TIMMS anglo-saxon, dont le score varie entre 100 et 400 points environ, avec une moyenne nationale de 250 et un écart-type de 50.

L'expérimentation didactique a été réalisée par une équipe de 7 enseignants (3 instituteurs et 4 institutrices), engagés dans ce programme, dont un instituteur enseignait à l'école A, un autre à l'école B et le troisième, en partenariat avec une institutrice, à l'école C. Les cours réalisés ont duré 90 minutes et ont été conduits par l'enseignant hôte et un enseignant assistant appartenant à l'équipe. Le reste de l'équipe a observé le déroulement de l'activité (dans l'esprit de l'étude de leçons japonaise, assez connue au Chili…).

La motivation des enseignants était de concevoir une activité pilote pour contribuer au développement des habilités cognitives décrites dans les programmes du Ministère de l'Éducation Nationale chilien (représenter, métaphoriser, modéliser, argumenter, communiquer…) qui restent pourtant lettre morte en salle de cours presque partout dans le pays, où l'on entraîne les élèves plutôt mécaniquement pour passer les tests nationaux. Leur tréfonds théorique comprenait la métaphorisation énactive, la théorie des situations et l'ingénierie didactique. On pourrait décrire leur travail comme un premier pas vers la mise au point d'une situation didactique pour les probabilités, basé sur l'exploration énactive d'une marche aléatoire simple, que l'on pourrait habiller en jeu.

Conception du cours

Premier moment, en salle de cours – L'enseignant raconte l'histoire de la grenouille qui voulait se promener sur une rangée de pierres dans une mare et avait une pièce dans sa poche. Les élèves – questionnés sur les usages possibles de la pièce – suggèrent qu'elle pourrait s'en servir pour décider de sauter à droite (pile) ou à gauche (face), majoritairement parmi d'autres réponses plus divergentes, comme s'en servir pour aller acheter du pain, par exemple.

Deuxième moment, dans la cour de l'école – L'enseignant partage la classe en deux groupes, de 15 élèves environ, au hasard, à l'aide d'une pochette avec des billes de deux couleurs. Les élèves de chaque groupe s'organisent collaborativement, en tâtonnant un peu, pour jouer « énactivement » le premier saut de la grenouille, à l'aide d'une pièce, en sautant eux-mêmes devant 7 pierres en carton. Un responsable élu dans chaque groupe enregistre les résultats en collant des grenouilles découpées sur un pictogramme. Puis ils font de même pour une promenade de deux sauts. Après quelques flottements, chaque groupe arrive à un consensus sur les pierres possibles et impossibles et sur le fait que l'origine est la position la plus fréquemment atteinte après 2 sauts.

Troisième moment, dans la cour de l'école : mise en commun – Les deux groupes comparent leurs résultats et discutent, sans intervention des enseignants. Ensuite l'enseignant propose à chaque groupe le défi de représenter la distribution « idéale » de 8 grenouilles, partant de la pierre centrale, après 3 sauts sur les 7 pierres, à l'aide d'un pictogramme avec 8 grenouilles auto-collantes. Nouvelle mise en commun et discussion sans intervention des enseignants.

Quatrième moment, dans la cour de l'école : institutionnalisation – L'enseignant invite les élèves à récapituler les différents chemins qui mènent à chaque pierre possible. Il active ainsi la métaphore « *pile-face-pile* est un chemin de la grenouille ». Il demande quel chemin mène vers la pierre +3. Ensuite il aide les élèves à décrire les différents chemins qui mènent la grenouille vers les pierres +1 et -1. Il dessine les différents chemins sur le tableau noir en commun accord avec toute la classe. Les élèves arrivent à décrire la répartition de grenouilles à l'aide de fractions.

Activité complémentaire : chorégraphie – En coordination avec le cours d'éducation physique, l'enseignant peut proposer aux élèves de mettre au point collectivement une *chorégraphie,* où un groupe de 8 élèves exécute en simultané et harmonieusement les 8 chemins possibles de la grenouille qui saute 3 fois. De même pour la grenouille qui saute 4 fois, avec un groupe de 16 élèves, et ainsi de suite. Il est intéressant d'observer comment les élèves s'y prennent pour réussir leur chorégraphie.

Les interventions didactiques

École A : jeudi 10 octobre 2013, de 8h30 à 12h00.

École B : vendredi 11 octobre 2013, de 8h30 à 12h00 (deux classes).

École C : lundi 14 octobre, de 8h00 à 10h00.

Commentaires *a posteriori*

La différence en performance entre les 3 écoles a été faible, bien que les élèves de l'école A aient une meilleure expression orale et qu'ils soient très motivés par les défis. Tous les élèves ont exécuté, représenté, argumenté et communiqué des idées. En termes généraux les groupes des trois écoles ont bien réussi à simuler la promenade de la grenouille avec une pièce. Ils se sont engagés et ils se sont sentis très motivés pour participer, notamment les élèves de B et C, qui d'habitude le sont moins que ceux de A. Une minorité des élèves de A et environ la moitié des élèves de B et de C ont cru au premier abord que toutes les pierres étaient « également possibles » pour 2 et 3 sauts, mais après discussion intra groupes un consensus sur le classement correct a été vite atteint. Au cours du travail collaboratif des groupes, on a vu les grenouilles autocollantes changer plusieurs fois de place dans les pictogrammes ! On a remarqué que les groupes de B et de C étaient moins homogènes que les groupes de A : surtout parmi les élèves de C, on comptait quelques élèves avec des problèmes de conduite, d'expression orale déficitaire, de vocabulaire très réduit et des idées initiales très fausses sur la répartition des grenouilles (corrigées après coup, grâce à la discussion groupale).

Il est curieux que dans chaque école, le moment venu de prédire le destin idéal de 8 grenouilles qui sautent 3 fois, un groupe a essayé de procéder « théoriquement », en réfléchissant uniquement sur les expériences préalables, tandis que l'autre est revenu à l'expérimentation, « pour voir »… A l'école B, le groupe « expérimental » a posé d'abord 4 grenouilles à la pierre -3 et aucune à la pierre -1, en se basant sur leur simulation, mais après que l'enseignant ait demandé si la pierre -3 était impossible, le groupe restant interloqué, l'un de ses membres a décidé de transférer une grenouille de -3 à -1, avec l'accord *a posteriori* du groupe. Dans le groupe « théorique », la responsable élue et d'autres élèves posent 2 grenouilles sur chaque pierre possible. Un débat s'ensuit car la plupart des jeunes voient plus de grenouilles près de l'origine. Il en résulte un consensus qui s'établit sur la distribution 1, 3, 3, 1. Finalement ces élèves ont tous modélisé en distribuant habilement les 8 grenouilles autocollantes (doublées en velcro) sur leurs pictogrammes, à l'issue de leur travail collaboratif.

Portée de cette activité

- Les élèves peuvent « incarner » les chemins de la grenouille avec du matériel concret. Par exemple, avec des fils en laine de couleur, tendus sur un géoplan, ou même mieux sur une planche de Galton. Ils peuvent alors toucher du doigt le rapport de Laplace entre le nombre de chemins favorables (ceux qui amènent la grenouille à la pierre qui nous intéresse) et le nombre total de chemins (tous de la même longueur !). La probabilité 3/8 de trouver la grenouille à la pierre +1 lors du 3^{e} saut apparaît alors d'une part comme le rapport entre les trois chemins qui y mènent et les 8 chemins possibles et d'autre part, via la métaphore hydraulique, comme indiqué dans la Figure 3 ci-dessus (3/8 = 1/8 + 2/8 = …).
- Les élèves, spécialement motivés par le caractère ludique, énactif et exploratoire de l'activité, ont pu pratiquer intensivement les habilités cognitives et sociales préconisées par le nouveau curriculum : représenter, métaphoriser, modéliser, argumenter, communiquer, ainsi qu'interpréter, coopérer et collaborer. Ceci vaut même pour les élèves de C à bagage socioculturel et linguistique bien plus réduit.
- Cette activité permet aux élèves de pratiquer de manière intégrée la trinité EIS (énactif, iconique et symbolique), puisqu'ils exécutent eux-mêmes la promenade de la grenouille, individuellement d'abord et collectivement et synchroniquement après, s'ils mettent au point la chorégraphie suggérée (mode énactif), puisqu'ils modélisent à l'aide de pictogrammes et diagrammes (mode iconique) et puisque la plupart arrivent à quantifier au moyen de rapports ou de fractions (mode symbolique), construisant ainsi la notion de probabilité.
- Cette activité aide les élèves à construire leur apprentissage de manière fortement collaborative. On voit comment le débat au sein du groupe permet de corriger les erreurs individuelles.
- Les élèves accèdent aux probabilités via une « statistique idéale » : ils lâchent 8 grenouilles qui, partant de la même pierre 0, vont se partager symétriquement, par moitiés, trois fois (une instance de métaphore pédestre).

– Les élèves ont la possibilité de découvrir une métaphore pédestre ou une métaphore hydraulique, en plus du triangle de Pascal (approché de manière pédestre…) dans le contexte de cette promenade aléatoire simple.

5.3. Approche métaphorique énactive pour l'espérance d'un temps d'attente

Nous pouvons laisser grandir notre pousse d'apprentissage à l'aide des marches aléatoires avec des barrières absorbantes. On pourrait en mettre dans la promenade de la grenouille. Par exemple, deux pierres, disons -5 et +10, pourraient être remplacées par des crocodiles ! Nous discuterons ailleurs plusieurs approches du problème de la ruine en tant que pousse d'apprentissage, mais nous aborderons ici un cas plus élaboré, à une infinité de barrières absorbantes : la marche aléatoire symétrique d'une fourmi sur un arbre binaire infini dont toutes les branches gauches sont taillées juste après la première pousse (Figure 4).

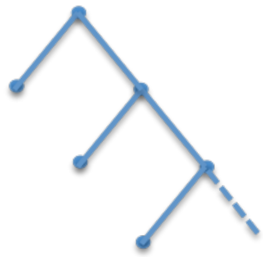

FIGURE 4 – *L'arbre binaire infini taillé*

Question : « Combien de temps faut-il à la fourmi pour arriver à un bout absorbant de l'arbre ? Autrement dit, quel est son temps de vie ? Et son espérance de vie ? »

Dans des termes plus familiers : on attend le succès lors de la répétition d'une expérience aléatoire dichotomique dont les résultats sont succès et échec, avec équiprobabilité. Métaphoriquement, on attend « pile » au lancer répété d'une pièce. Noter aussi qu'alors le lancement répété de la pièce et la marche de la fourmi sont chacune une métaphore de l'autre ! Notre question devient alors : « Combien de lancers faut-il attendre pour obtenir « pile » ? Quelle est l'attente espérée ? »

Nous avons expérimenté cette activité avec des apprenants *b, c, e,* et avec les participants *i.*

Une ingénierie didactique (Artigue, 1998) associée à cette activité a été décrite dans Diaz-Rojas et Soto-Andrade (2015). Nous en résumons ici les traits essentiels et ajoutons quelques observations et commentaires.

Suivant notre approche métaphorique et énactive pour l'enseignement des mathématiques à « tous les enfants du monde », nous ne proposons pas aux élèves la tâche de calculer l'espérance du temps d'attente (de « 1 ») pour une variable aléatoire de Bernoulli symétrique, mais uniquement une métaphorisation énactive de cela, soit comme la marche aléatoire de la fourmi soit comme le lancement répété de la pièce.

D'ailleurs, nous demandons aux enseignants en formation initiale *c* et aux enseignants du secondaire en formation continue comment ils présenteraient eux-mêmes cette tâche à leurs élèves…

Les apprenants *b,* surtout, abordent cette question impossible « à mains nues », parce qu'ils n'ont pas été exposés au calcul des probabilités à l'Université et ont même oublié les rudiments des probabilités qu'on leur a mal enseignés au lycée. Bien sûr, imaginer ou construire une réponse censée à cette question impossible fait partie de cette tâche ouverte, qui se précise progressivement grâce au travail interactif et collaboratif des apprenants (voir analyse *a priori* ci-dessous), en accord avec notre approche énactive d'après laquelle les problèmes ne sont pas « là dehors » en attendant d'être résolus mais sont « co-construits » par le sujet cognitif et son milieu (Varela 1987, 1999). Notre but est que les étudiants apprennent à explorer une situation problématique et à conjecturer et « voir » une solution avant de calculer aveuglement la somme d'une série ou une moyenne sur beaucoup de répétitions de l'expérience.

Au regard de la méthodologie, nous (un professeur et une assistante) avons observé les étudiants *b, c, e* pendant une séance de travail collaboratif de 90 minutes, et les participants *i* pendant une séance analogue de 45 minutes. Ils ont tous travaillé en groupes de 20 environ.

La situation mathématique – Comme le temps d'attente cherché vaut *n* avec probabilité $1/2^n$, son espérance est $\sum_1^\infty \frac{n}{2^n}$. Un mathématicien additionnerait « en diagonale », pour trouver aussitôt que cette série plutôt rébarbative devient la série géométrique $\sum_0^\infty \frac{1}{2^n}$, qui vaut 2. Notons cependant que les étudiants qui ont d'abord trouvé la somme de la série géométrique à l'aide d'une métaphore hydraulique, en « trayant » l'arbre hydraulique binaire taillé de la Figure 4, ont été aussi capables de calculer métaphoriquement cette série peu aimable. Pour cela, ils ont imaginé des pots supplémentaires du même contenu $1/2^n$, pour chaque *n*, qu'ils ont disposé sur des rangées horizontales à coté du $1/2^n$ de litre se trouvant à chaque bout gauche de l'arbre. En « trayant » en diagonale le triangle de pots ainsi construit, ils ont trouvé aisément que $\sum_1^\infty \frac{n}{2^n}$ vaut 2.

Cependant, le défi que nous voulons relever est que les apprenants, même s'ils fréquentent l'école primaire, arrivent à « voir » énactivement ce résultat, sans avoir à sommer la série infinie (tâche rébarbative pour le reste, particulièrement pour les élèves du lycée ou les étudiants en sciences humaines *b*) ou à faire la moyenne sur un grand nombre d'expériences (aussi rébarbatif pour la plupart). Habituellement, ni enseignants ni élèves ne voient d'autres issues que l'approche théorique-symbolique ou empirique-statistique.

La situation didactique : scénario provisoire et analyse *a priori* – L'enseignant lance une pièce ostensiblement et il, ou elle, invite les étudiants à faire des suggestions et à poser des questions. La question sur le temps d'attente de « pile » devrait émerger assez facilement. « On ne peut pas savoir ! » diront certains. En expérimentant, ils remarquent la variabilité du temps d'attente. Certains désespèrent déjà. Mais il y a toujours quelqu'un qui suggère de faire la moyenne. Ils trouvent 2,5 par exemple. Alors ? Un débat s'instaure. Certains conjecturent que cela devrait tendre vers 3 si on continue à expérimenter. Et si tous les étudiants du campus attendaient « pile » ? Certains se lasseront d'expérimenter et essaieront une approche théorique, en dessinant par exemple l'arbre tronqué (Figure 4) et en assignant aisément les probabilités à l'aide d'une métaphore hydraulique (Soto-Andrade, 2013a). Mais ils aboutissent à l'expression de l'espérance (en tant que moyenne idéale) comme une série rébarbative ! Certains songent à convaincre tous les habitants du pays d'attendre la sortie de « pile » et faire la moyenne des observations!

Si aucune nouvelle idée n'émerge, l'enseignant peut suggérer de jouer, ou de mettre en œuvre la situation, physiquement, tous ensemble (approche énactive et collaborative !). Dans un cercle d'une vingtaine de participants environ, chacun attendra donc « pile », en lançant sa pièce, et on fera la moyenne, pour essayer de comprendre. L'enseignant demande comment ils feront pour calculer la moyenne. Les étudiants s'aperçoivent qu'il ne serait pas très habile que chacun doive *dire* combien de fois il a dû lancer sa pièce, et que quelqu'un (qui ?) ajoute après toutes ces données et divise par le nombre de joueurs, disons 23. On peut le faire, mais on ne voit pas *a priori* ce qu'on obtiendra comme quotient…

Fréquemment certains remarquent que, *idéalement,* la moitié d'entre eux devraient avoir « pile » au premier lancer et que, parmi ceux qui échouent, la moitié réussiraient au deuxième coup, et ainsi de suite… C'est une idée intéressante, mais qui les mène à nouveau à une somme infinie rébarbative, encore que géométrique. Il arrive parfois qu'à ce moment là quelqu'un remarque que leur jeu est une métaphore de la désintégration des éléments radioactifs : chaque atome lance une pièce pour « décider » s'il se désintègre ou pas… Ils seraient donc en train d'estimer la « vie moyenne » de ces atomes !

Arrivés à ce point, l'enseignant pourrait faire remarquer que devoir demander à chacun combien de lancers il a attendu pour avoir « pile » est un peu maladroit : on aimerait mieux « voir » l'attente de chacun, au lieu d'interroger, ce qui signifie un changement de registre vers le non-verbal. Dans plusieurs mises en œuvre de cette expérience, après quelques minutes d'intense réflexion, un étudiant ou une étudiante suggère : on pourrait lancer chaque fois une nouvelle pièce ! Tous suivent (en empruntant des pièces à l'enseignant au besoin) et après quelques instants chacun a plusieurs pièces devant lui. On devrait alors compter toutes ces pièces et diviser le nombre obtenu par le nombre de joueurs, mais on ne voit pas encore la valeur « idéale » de ce quotient, avant de le calculer.

Si les étudiants stagnent, l'enseignant peut demander : « Qu'est-ce que vous voyez, par terre ? Juste un tas de pièces ? ». Certains diront : « Il y a des « pile » et des « face ». ». Habituellement, après plusieurs minutes, c'est une étudiante qui fait remarquer qu'on a chacun juste un « pile » devant soi ! Ils s'aperçoivent alors qu'ils vont diviser le nombre total de pièces par le nombre des « pile » ! A ce moment, peut-être la moitie d'entre eux « verront » que ce quotient devrait être idéalement 2, parce que idéalement le nombre de « pile » obtenus en lançant un certain nombre de pièces devrait en être la moitié ! Après cette percée, l'enseignant peut demander aux étudiants de rester une minute en contemplant ce qu'ils ont vu enactivement, et ensuite l'exprimer de manière iconique et symbolique.

Il est à remarquer que les étudiants, en plus de « voir » que le temps d'attente espéré est 2, ont montré en cours de route, de façon enactive et métaphorique, que $\sum_1^\infty \frac{n}{2^n} = 2$. De plus, s'ils reviennent à leur première approche, ils s'apercevront que l'on peut mettre toutes les pièces qui sont par terre dans un pot commun de manière collaborative, comme suit : chacun prend soin du tas de pièces devant soi, mais pour commencer tous apportent solidairement juste une pièce dans le pot commun. Après cela, ceux qui peuvent le faire donnent une seconde pièce (ce sera idéalement la moitié de tout le groupe). Ensuite, ceux qui le peuvent, donnent une troisième pièce, et ainsi de suite. Pour faire la moyenne il faut diviser par le nombre des joueurs. On trouvera alors une somme de la forme 1 (= « tous » divisé par « tous ») + ½ (= la « moitié de tout le groupe » divisée par « tous ») + ¼ (= la «quatrième partie » divisée par « tous ») +… etc. En imaginant que la quantité de joueurs tend vers l'infini, on trouve que la moyenne idéale (l'espérance) est donnée maintenant par $\sum_0^\infty \frac{1}{2^n}$ et donc que

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

La situation didactique : analyse *a posteriori* – L'idée de lancer une nouvelle pièce après chaque échec est apparue aussi facilement chez les apprenants b que chez les autres, après quelques instants de réflexion. La découverte que le nombre de joueurs coïncide avec le nombre de « pile » par terre a été plus lente à émerger, mais sans différence significative entre les étudiants en sciences humaines b et les autres apprenants plus portés sur les mathématiques. Par contre nous avons remarqué un biais de genre significatif : environ 80% des fois, c'est une étudiante qui a été le premier des participants à le remarquer.

La relation entre la moyenne expérimentale et la « moyenne idéale » a émergé plutôt lentement. Les estimations de la moyenne expérimentale du temps d'attente pour des millions de personnes ont été fort divergentes, entre les apprenants b et les autres (*c, e*). Ces derniers ont eu tendance à penser que, comme c'était aléatoire, on ne pouvait pas dire grand chose sur la moyenne expérimentale pour un grand nombre de joueurs.

Les étudiants *b*, par contre, ont fait mieux en essayant de prédire le comportement de cette moyenne quand le nombre de joueurs grandit considérablement. Nous pensons que cela est dû au fait que, contrairement aux apprenants *c* et *i*, ils avaient au préalable lancé 100 fois une pièce et enregistré, visualisé graphiquement et contemplé le processus stochastique en entier, s'apercevant ainsi que l'avatar le plus simple du hasard engendre des formes complexes qui ressemblent à celles des profils montagneux et des évolutions des cours de la bourse. Ils ont aussi vu plus facilement que les autres que la moyenne idéale devrait être 2, qui est l'inverse de la fréquence relative idéale de pile quand nous lançons un grand nombre de fois une pièce.

En tout cas tous les étudiants qui ont vu que la moyenne idéale du temps d'attente de « pile » était 2 ont conjecturé aussitôt que la moyenne idéale du temps d'attente de l'as en lançant un dé devrait être 6. Le travail symbolique ultérieur avec l'espérance en forme de série a été plus facile avec les étudiants *c* et *e,* qui ont un entraînement mathématique plus poussé.

De plus, un jeu a émergé dans la dynamique de cette mise en œuvre, ce qui suggère une autre approche possible du temps d'attente espéré : l'enseignant donne à chaque étudiant autant de pièces qu'il lui faut pour obtenir « pile » en les lançant l'une après l'autre. Quand l'étudiant finalement obtient « pile », le jeu s'achève et il garde, comme prix, toutes les pièces qu'il a reçues ! « Avez-vous une question ? » demande-t-on aux étudiants. Même chez les étudiants en sciences humaines, il y en a qui répondent vite : « Combien faudrait-il payer pour jouer ce jeu si alléchant ? Quel en serait le coût équitable ? ». C'est ce qu'on appelle le « coût juste ». Les étudiants *b* n'ont pas de mal à trouver une définition opérationnelle de coût juste : c'est celui qui fait que à la fin de la journée, quand on fait ses comptes, après avoir fait jouer un bon nombre de joueurs, en leur faisant payer le prix en question, il trouve que la caisse est en équilibre !

6. Discussion et conclusions

Notre approche théorique nous a amenés à mettre en œuvre une pousse d'apprentissage énactive et métaphorique qui démarre en tirant parti d'une promenade aléatoire fort simple (celle de la grenouille sur une rangée de pierres, décrite en 5.2 ci-dessus), pour faciliter l'apprentissage de la pensée stochastique chez les enfants. Malgré les différences socio-culturelles entre leurs foyers, ces enfants de 10 à 12 ans, de 3 écoles fort différentes, ont pu aborder avec succès, à mains nues, une situation problématique inattendue qui les a motivés et a déclenché leur engagement actif. Ce faisant, ils ont travaillé de manière autonome et collaborative, en exécutant eux-mêmes la marche aléatoire de la grenouille dans une première phase d'exploration statistique expérimentale, pour 1 et 2 sauts de la grenouille, ce qui leur a permis ensuite d'arriver à proposer même un modèle probabiliste dans le cas nouveau de 3 sauts. On notera que ce modèle peut être validé par eux, soit au moyen d'une expérimentation statistique plus poussée, soit par un recours théorique, comme l'identification et le décompte de tous les chemins possibles composés d'un, deux ou trois sauts.

Ces élèves ont donc pu représenter une situation, jouer et modéliser, des habilités cognitives promues par le nouveau curriculum, en sus de pratiquer des habilités sociales comme communiquer, argumenter, débattre et collaborer. La situation proposée leur a permis aussi de travailler de manière intégrée en mode énactif (exécution de la promenade), iconique (pictogrammes et diagrammes) et symbolique (rapports et fractions associés aux pierres possibles).

Nous voyons donc que nous avons ici un outil fort approprié pour que les enfants, tout en pratiquant des habilités fondamentales et la trilogie EIS, puissent construire en cours de route le concept de probabilité, par plusieurs voies.

Notre pousse d'apprentissage a ensuite « grandi » tout naturellement, s'appliquant au niveau supérieur (*b, c, d, i* dans 5.1*)*, où elle comporte l'exploration énactive du temps d'attente de l'absorption dans une marche aléatoire à barrières absorbantes (autrement dit, l'attente de « pile » au lancer d'une pièce). Néanmoins, rien n'empêche de développer cette activité au collège par exemple, grâce à une énaction (mise en œuvre) adéquate.

En effet, notre expérimentation montre que plusieurs années d'entraînement mathématique ne créent pas de différence significative dans les performances lors d'une exécution ou d'une mise en œuvre comme celle que nous avons décrite en 5.3. Les apprenants *b* qui viennent directement de l'école secondaire, habituellement avec une relation pourrie avec les mathématiques, ont réussi aussi bien que les autres apprenants *c, d, i,* au moment d'essayer de « voir » énactivement la valeur de la moyenne idéale du temps d'attente de « pile ».

Le seul avantage des étudiants *b* était néanmoins d'avoir lancé, juste auparavant dans ce cours, 100 fois une pièce et d'avoir contemplé son histoire en représentant graphiquement le processus. Ils ont vu alors comment le hasard engendre des formes complexes, semblables à celles qu'on trouve dans la nature ; c'est là une découverte qu'ils n'avaient jamais faite au lycée, où ils ne faisaient que réciter. On entrevoit donc que les expériences énactives peuvent s'enchaîner et interagir dans une boucle de rétroalimentation dans l'histoire de vie des apprenants, comme l'ont suggéré Varela *et al.* (1999) : « *la cognition n'est pas la représentation d'un monde donné à l'avance par un esprit donné au préalable, mais plutôt la mise en œuvre (enactment) conjointe d'un monde et un esprit fondée sur une* <u>*histoire*</u> *de la variété d'actions qu'un être réalise dans le monde* » (c'est nous qui soulignons).

Ainsi, c'est aussi notre hypothèse que le fait de rencontrer successivement plusieurs avatars de la même pousse le long de leur scolarité contribue fortement à l'ancrage de l'apprentissage des étudiants.

Nous observons de plus, dans nos expériences didactiques, qu'apprendre énactivement n'est pas une course en solitaire mais une entreprise collective et sociale, qui peut même être regardée comme un avatar de l'intelligence des essaims (Soto-Andrade, 2013a).

Dans le proche avenir, nous aimerions, entre autres recherches :

- explorer comment les enfants s'y prendraient pour mettre au point une chorégraphie, où 8 d'entre eux exécutent en simultané les 8 chemins possibles de la grenouille qui fait 3 sauts, et ainsi de suite (une énaction des chemins !). Cette idée n'est apparue qu'après la mise en œuvre de l'intervention didactique 5.2 et nous ne l'avons essayée jusqu'à présent qu'avec des enseignants du primaire (*a* et *g* de la liste 5.1). Il est remarquable que deux groupes sur trois optent pour une procédure coopérative (un enseignant prend le rôle de maître du jeu et distribue à chacun son script) au lieu d'une procédure collaborative (pas de maître du jeu ni de script, les 8 enseignants sautent en se partageant en moitiés trois fois), qui est bien plus performante pour 4 sauts, 5 sauts… ;
- prolonger notre pousse d'apprentissage basée sur les marches aléatoires, pour tenir compte d'autres niveaux scolaires et supérieurs ainsi que des activités ouvertes de diffusion concernant l'interaction avec les sciences et les arts (aux Maisons de la Culture, par exemple).

Références

[1] Abrahamson, D., & Trninic, D. (2015). Bringing forth mathematical concepts: signifying sensorimotor enactment in fields of promoted action. In D. Reid, L. Brown, A. Coles, & M.-D. Lozano (Eds.), Enactivist methodology in mathematics education research [Special issue]. *ZDM*, **47**(2), 295-306. doi: 10.1007/s11858-014-0620-0

[2] Anonymous (ca. 1600). I fioretti di san Francesco, http://www.liberliber.it/libri/f/fioretti_di_san_francesco/index.htm

[3] Andrade, S., García, G., Lara, M., López F., López K., Soto K., Vivallo, M. (2013). "Datos y probabilidades: experiencia de aprendizaje en 5° año básico", Seminario de Postítulo, Université du Chili, Santiago.

[4] Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9/3, 281-308.

[5] Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage, Grenoble.

[6] Bruner, J. (1996). L'éducation, entrée dans la culture. Les problèmes de l'école à la lumière de la psychologie culturelle, Retz, Paris.

[7] Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento (1a ed.). Editorial Gedisa S.A., Barcelona.

[8] dall'Acqua, L. (2010). Learning Path and Assessment Criteria in the Conception and Development of an e-course based on the PENTHA ID Model". Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2010, 1, San Francisco, USA.

[9] Díaz-Rojas, D. & Soto-Andrade, J., (2015). Enactive Metaphoric Approaches to randomness. À paraître aux *Proceedings CERME 9*, Prague, 2015, 10 p.

[10] Duval, R. (1995). Semiosis et Pensée Humaine et Semiosis, Peter Lang, Berne.

[11] Einstein A. (1956). *Investigations of the Theory of Brownian Movement*. Dover, New York.

[12] English, L. (ed.) (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images,* Lawrence Erlbaum Associates, Londres.

[13] Gigerenzer, G. (2011). What are natural frequencies? Doctors need to find better ways to communicate risk to patients. *BMJ*, *343:d6386*. doi:10.1136/bmj.d6386

[14] Johnson, M. & Lakoff, G. (2003). *Metaphors we live by*, The University of Chicago Press, New York.

[15] Knops, A., Thirion, B., Hubbard, E. M., Michel, V., & Dehaene, S. (2009). Recruitment of an area involved in eye movements during mental arithmetic. *Science*, **324**(5934), 1583-1585.

[16] Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from*. Basic Books, New York.

[17] Libedinsky, N., Soto-Andrade, J. (2015). "On the role of corporeality, affect and metaphoring in Problem solving", to appear in *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives*, P. Felmer, J. Kilpatrick, & E. Pehkonen (Eds.), 10 p., Springer-Verlag, Berlin.

[18] López, K. (2014). *El paseo de la rana*. Université du Chili, Santiago.

[19] Malkemus, S. A. (2012). Towards a general theory of enaction, *The Journal of Transpersonal Psychology*, **44**(2), 201-223.

[20] Manin, Yu. (2007). Mathematics as metaphor, Amer. Math. Society, Providence, RI.

[21] Marshall, S. (2015). Reading hexagrams off the *Xiantian* diagram, www.biroco.com/yijing/xiantian.htm

[22] Maturana, H. et Varela, F. (1994). *L'arbre de la connaissance*, Addison-Wesley France, Paris.

[23] Masciotra, D., Roth, W.-M., & Morel, D. (2007). *Enaction: Toward a Zen mind in learning and teaching*. Sense Publishers, Rotterdam, Pays-Bas.

[24] Pearson, K. (1905). The problem of the random walk, *Nature* 72, 294; 318; 342.

[25] Pouilloux, J.-Y. (2004). Article sur la Métaphore, *Encyclopædia Universalis*, Paris.

[26] Proulx, J., Simmt, E. (2013). Enactivism in mathematics education: moving toward a re-conceptualization of learning and knowledge, *Education Sciences & Society*, 4, 59-79.

[27] Raichlen, D. A. et al. (2014). Evidence of Lévy walk foraging patterns in human hunter–gatherers, *PNAS*, **111**(2), 728-733.

[28] Powles, J. G. (1978). Brownian motion – June 1827. *Phys. Educ.* (13), 310-312 http://www.physik.uni-augsburg.de/theo1/hanggi/History/BMPowles.pdf

[29] Preuss, P. (2002). Brownian motion in metals, *Science Beat (Berkeley Lab)*, December 17, 2002, http://www.lbl.gov/Science-Articles/Archive/MSD-Brownian-motion.html

[30] Sfard, A. (2009). Metaphors in education. In H. Daniels, H. Lauder & J. Porter (Eds.), Educational theories, cultures and learning: a critical perspective (pp. 39-50). Routledge, New York.

[31] Soto-Andrade, J. (2006). Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l'apprentissage des maths. *Ann. Didactique Sciences Cogn*., 11, 123-147.

[32] Soto-Andrade, J. (2013a). Metaphoric Random Walks: A Royal Road to Stochastic Thinking. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of CERME 8*, (pp. 890-900), http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG5/WG5_Soto_Andrade.pdf

[33] Soto-Andrade, J. (2013b). Metaphors and didactical situations », Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5. Kiel, Germany: PME (p. 169).

[34] Soto-Andrade J. (2014). Metaphors in Mathematics Education. In: Lerman S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 447-453), Springer-Verlag, Berlin.

[35] Díaz-Rojas, D. & Soto-Andrade, J. (2015). Enactive Methaporic Approaches to randomness. To appear in *Proceedings of CERME 9*, Prague, 2015, 10 p.

[36] Thompson, E. (2007). *Mind in life: Biology, phenomenology, and the sciences of mind*, The Belknap Press of Harvard University, Cambridge, MA.

[37] Varela, F.J. (1987). Lying down a path in walking. In W.I. Thompson (Ed.). Gaia: A Way of Knowing (pp. 48-64), Lindisfarne Press, Hudson, NY.

[38] Varela, F., Thompson, E. et Rosch, E. (1999). *L'inscription corporelle de l'esprit : sciences cognitives et expérience humaine*, Seuil, Paris.

[39] Wilhem, R. (1994). *Yi King : le Livre des transformations*, Médicis Éds., Paris.

[40] Wittmann, E. (2012). Teaching and learning mathematics along fundamental mathematical ideas from kindergarten to the matura, In RS Zavod Ed, 1st International Conference on Learning and Teaching Mathematics, Maribor, 2012 (pp. 13-25). El. Knjiga, Ljubljana, , http://www.zrss.si/pdf/zbornikprispevkovkupm2012.pdf